

УДК 539.1.03

А. АХМАДИ (ИРАН), И. Д. ФЕРАНЧУК

ЭФФЕКТЫ ДИНАМИЧЕСКОЙ ДИФРАКЦИИ В ПАРАМЕТРИЧЕСКОМ МЁССБАУЭРОВСКОМ ИЗЛУЧЕНИИ

Построена динамическая теория параметрического гамма-излучения от релятивистских электронов в кристаллах, содержащих мёссбауэровские ядра. Проведен детальный анализ изменения спектрально-углового распределения излучения вследствие эффекта подавления неупругих каналов. Показано, что в узком диапазоне углов это приводит к увеличению дифференциальной интенсивности на несколько порядков. Найдено также полное число резонансных квантов, испускаемых в направлении дифракционного пика параметрического излучения в кристаллах с толщиной, превышающей длину поглощения излучения. Показано, что, несмотря на сильное поглощение резонансного излучения в толстых кристаллах, интегральный выход излучения имеет тот же порядок величины, что и в рамках кинематической теории дифракции.

Ключевые слова: динамическая дифракция; параметрическое излучение; мёссбауэровский кристалл.

Dynamical diffraction theory of the parametric gamma-radiation from relativistic electrons in the crystals with Mössbauer nuclei is considered. A detailed analysis of the influence of suppression of inelastic scattering channels on the spectral-angular radiation distribution is considered. The obtained results show that in the narrow angular range this effect leads to increase of the differential intensity by several orders of magnitude. The total number of the quanta emitted in the diffraction peak direction in the thick crystals is also calculated. It is shown that in spite of the strong absorption of the resonant radiation the integral output of the photons is the same order of magnitude as in the framework of the kinematical diffraction theory in thin crystals.

Key words: dynamical diffraction; parametric radiation; Mössbauer crystal.

В работе [1] в рамках кинематической теории дифракции был проведен анализ характеристик параметрического мёссбауэровского излучения (ПМИ), возникающего при прохождении пучков релятивистских электронов через кристаллы, содержащие мёссбауэровские ядра. Этот процесс имеет такую же природу, что и параметрическое рентгеновское излучение (ПРИ) [2], но возникает в том случае, если частота излучения в дифракционном пике ПРИ совпадает с частотой резонансного перехода ядер.

Хорошо известно [2], что максимальное значение интенсивности ПРИ достигается в кристаллах с толщиной L , большей длины поглощения испускаемого излучения. В этом случае учет эффекта Бормана [3], обусловленного динамической дифракцией испускаемых фотонов, существенно влияет на интенсивность и угловое распределение излучения [4]. При дифракции резонансных гамма-квантов в мёссбауэровских кристаллах эффект аномального прохождения проявляется более ярко, чем в случае дифракции рентгеновских фотонов, что обусловлено малыми размерами ядра по сравнению со средним радиусом распределения электронной плотности в атомах [5]. Целью настоящей работы является детальный анализ влияния этого эффекта на интенсивность и угловое распределение ПМИ, что существенно для оптимального выбора параметров кристалла при использовании ПМИ в качестве возможного источника резонансного гамма-излучения.

Расчет спектрально-углового распределения интенсивности ПМИ в рамках динамической теории дифракции может быть выполнен на основе общего выражения, вывод которого детально описан в [2]. Для распределения фотонов с энергией $\hbar\omega$ и поляризацией \vec{e}_{sg} вблизи дифракционного пика имеет место следующая формула:

$$\frac{\partial^2 N_s^g}{\partial \vec{\Omega} \partial \omega} = \frac{e_0^2}{\hbar \omega \pi^2 c} (\vec{e}_{sg} \vec{n}_g)^2 \beta^2 |\gamma_0| \left| \sum_{\mu=1}^2 \lambda_{\mu s}^g \left[\frac{1}{q_0^g} - \frac{1}{q_{\mu s}^g} \right] (1 - e^{-ikLq_{\mu s}^g \gamma_0^{-1}}) \right|^2, \quad k = \frac{\omega}{c}. \quad (1)$$

Этот пик направлен вдоль вектора \vec{k}_B , который наряду с другими векторами и углами, существенными для характеристики пика ПМИ, показан на рис. 1, причем

$$\vec{k}_B = \omega_B \frac{\vec{v}}{v^2} + \vec{g}; \quad \omega_B = c \frac{g^2}{2|g_z|}.$$

Другие величины в уравнении (1) определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} q_0^g &= \frac{1}{k_B L_0^g} = \frac{m^2 c^4}{E^2} + \theta_{(g)}^2, \quad q_{\mu s}^g = \frac{1}{k_B L_{\mu s}^g} = \frac{m^2 c^4}{E^2} + \theta_{(g)}^2 + \theta_s^2(L) - 2\varepsilon_{\mu s}, \\ \theta_s^2(L) &= \frac{E_s^2}{E^2} \frac{L}{L_R}; \quad \theta_{(g)}^2 = \vartheta_x^2 + \vartheta_y^2; \quad \vec{k} = \vec{k}_B + \vec{u}; \quad \vartheta_{x,y} = \frac{u_{x,y}}{k_B}, \\ \gamma_0 &= \frac{\vec{k}_B \vec{N}}{k}; \quad \beta = \frac{v(\vec{k}_B \vec{N})}{k(\vec{v} \vec{N})}; \quad \vec{n}_g = \frac{\vec{k}_B}{k_B}; \quad \vec{e}_{\sigma g} = \frac{1}{k_B} [\vec{k} \times \vec{n}_g]; \quad \vec{e}_{\pi g} = [\vec{e}_{\sigma g} \times \vec{n}_g], \end{aligned} \quad (2)$$

где m, E, e_0, \vec{v} – масса, энергия, заряд и скорость электрона соответственно, величина $\theta_s^2(L)$ учитывает многократное рассеяние электронов в кристалле ($E_s = 21$ МэВ и L_R – радиационная длина, для $^{57}_{26}\text{Fe}$ $L_R \approx 1,27$ см); $\varepsilon_{\mu s}$ – решения дисперсионных уравнений, в двухволновом приближении определяются следующими выражениями:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\mu s} &= \frac{1}{4} \{ [\chi_0 + \beta \chi_0 - \beta \alpha_B] \pm \sqrt{[\chi_0 + \beta \chi_0 - \beta \alpha_B]^2 + 4\beta[\chi_0 \alpha_B - (\chi_0^2 - c_s^2 \chi_g \chi_{-\bar{g}})]} \}, \\ \alpha_B &= \frac{2\vec{k} \vec{g} + g^2}{k^2}; \quad c_s = (\vec{e}_s \vec{e}_{s g}); \quad \lambda_{i(2)s}^g = \frac{c_s \chi_g}{2(\varepsilon_{2(1)s} - \varepsilon_{1(2)s})}. \end{aligned} \quad (3)$$

В выражении (3) α_B характеризует отклонение вектора \vec{k} от условия Вульфа – Брэгга, $c_s = 1$ для σ -поляризации и $c_s = 2 \cos 2\theta_B$ для π -поляризации (θ_B – угол между \vec{v} и плоскостями, соответствующими вектору \vec{g}). Параметры χ_0 и χ_g являются компонентами фурье-разложения периодической в пространстве диэлектрической восприимчивости кристалла и непосредственно связаны с амплитудами упругого когерентного рассеяния фотонов электронами и ядрами кристалла [2–5]. Эти параметры хорошо известны в динамической теории дифракции [3] и в случае мёссбауэровских кристаллов включают электронную χ_e и ядерную χ_n части [5]:

$$\chi_0 = \chi_e(0, \omega_r) + \chi_n(\omega); \quad \chi_{\bar{g}} = \chi_e(\vec{g}, \omega_r) + \chi_n(\vec{g}, \omega).$$

Для расчета ПМИ электронная часть восприимчивости вычисляется на резонансной частоте ω_r и может рассматриваться как постоянная величина, а остальные величины определяются следующими выражениями [5]:

$$\begin{aligned} \chi_e(\vec{g}, \omega_r) &= \frac{4\pi S(\vec{g}) e^{-W(\vec{g})}}{\Omega_0 \omega_r^2} f_e(\vec{g}); \quad f_e(\vec{g}) = -\frac{e_0^2}{m} F_a(\vec{g}), \\ \chi_n(\vec{g}, \omega) &= \frac{4\pi S(\vec{g}) e^{-W(\vec{g})}}{\Omega_0 \omega_r^2} f_n(\omega); \quad f_n(\omega) = -\frac{\eta}{\omega_r(1 + \alpha_c)} \frac{\Gamma/2}{\omega - \omega_r + i\Gamma/2}. \end{aligned}$$

Здесь Ω_0 – объем элементарной ячейки кристалла; f_e и f_n – соответственно амплитуды когерентного рассеяния фотона на электронах и ядре; $S(\vec{g})$ – структурный фактор элементарной ячейки кристалла; $F_a(\vec{g})$ – форм-фактор атома ($F_a(0) = Z_a$ – заряд атома); $e^{-W(\vec{g})}$ – фактор Дебая – Уоллера; ω_r, Γ – соответственно частота и ширина резонансного перехода ядра, η – относительная концентрация мёссбауэровских изотопов в элементарной ячейке, α_c – коэффициент внутренней конверсии.

В работе рассматривается интенсивность ПМИ для случая аномального прохождения гамма-квантов. В соответствии с [4] этот эффект является существенным для σ -поляризации и ему соответствует спектрально-угловой диапазон, когда дифракционная когерентная длина $L_{\mu s}^g$ велика по сравнению с вакуумной когерентной длиной L_0^g . Для релятивистских электронов это условие позволяет упростить соотношение (1):

$$\frac{\partial^2 N_s^g}{\partial \Omega \partial \omega} = \frac{e_0^2}{\hbar \omega \pi^2 c} (\vartheta_x^2 + \frac{1}{2} \theta_s^2) \beta^2 |\gamma_0| \frac{|\chi_g|^2}{4|\varepsilon_{1\sigma} - \varepsilon_{2\sigma}|^2} \left| \sum_{\mu=1}^2 (-1)^\mu \frac{(1 - e^{-ikL_{\mu s}^g \gamma_0^{-1}})}{q_{\mu s}^g} \right|^2. \quad (4)$$

Анализ этого выражения для ПРИ и ПМИ существенно различается. В первом случае можно использовать условие $\chi_g'' \ll |\chi_g'|$ [3], в то же время вблизи резонанса $\omega \approx \omega_r$, $\chi_g'' \approx |\chi_g'|$ являются величинами одного порядка. Поэтому приближенный метод, использованный в [4], не применим в случае ПМИ. Для того чтобы вычислить спектральное распределение ПМИ, нужно проинтегрировать соотношение (4) по углам ϑ_x, ϑ_y в плоскости детектора (рис. 1).

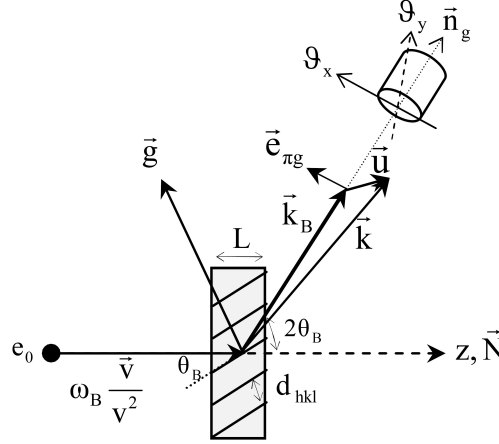


Рис. 1. Система координат для определения угловых переменных в пике ПМИ в случае Лауэ

Для релятивистских электронов [1]:

$$|\vartheta_x| \approx |\vartheta_y| \leq \frac{mc^2}{E} \equiv \gamma^{-1} \ll 1$$

и удобно использовать полярную систему координат $\vartheta_x = \theta \cos \varphi$, $\vartheta_y = \theta \sin \varphi$. В результате для спектрального распределения ПМИ находим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_\sigma^g}{\partial \omega} &= \frac{e_0^2}{\hbar \omega \pi^2 c} 2 \int_0^\infty \theta d\theta \int_0^\pi \{ \Phi[\psi(\theta), \alpha_B(\theta, \varphi)] + \Phi[\psi(\theta), \alpha_B(\theta, \varphi + \pi/2)] \} d\varphi, \\ \Phi[\psi(\theta), \alpha_B(\theta, \varphi)] &= (\theta^2 \cos^2 \varphi + \frac{1}{2} \theta_s^2) \frac{\beta^2 |\gamma_0| |\chi_g'|^2}{4 |\varepsilon_{1\sigma} - \varepsilon_{2\sigma}|^2} \left| \sum_{\mu=1}^2 (-1)^\mu \frac{(1 - e^{-ikLq_{\mu\sigma}^g \gamma_0^{-1}})}{q_{\mu\sigma}^g} \right|^2. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь

$$\psi = \theta^2 + \gamma^{-2} + \theta_s^2(L) \equiv \theta^2 + \theta_0^2; \alpha_B = 4 \sin^2 \theta_B \frac{\omega - \omega_B}{\omega_B} - 2\theta \cos \varphi \sin 2\theta_B; q_{\mu\sigma}^g = \psi - 2\varepsilon_{\mu\sigma}.$$

В случае ПМИ, в отличие от [4], необходим численный расчет этого интеграла, для чего удобно ввести новые переменные:

$$\psi; \quad t = \alpha_B - 4 \sin^2 \theta_B \frac{\omega - \omega_B}{\omega_B} = \alpha_B - \delta; \quad \theta^2 = \psi - \theta_0^2; \quad \cos \varphi = -\frac{t}{2\theta \sin 2\theta_B},$$

что приводит интеграл (5) к виду

$$\frac{\partial N_\sigma^g}{\partial \omega} = \frac{e_0^2}{\hbar \omega \pi^2 c} \int_{\theta_0^2}^\infty d\psi \int_0^{2 \sin 2\theta_B \sqrt{\psi - \theta_0^2}} \frac{F[\psi, \delta - t] + F[\psi, \delta + t]}{\sqrt{4(\psi - \theta_0^2) \sin^2 2\theta_B - t^2}} dt. \quad (6)$$

Влияние динамического эффекта можно оценить при сравнении максимальной интенсивности ПМИ (I_m) с аналогичным значением в кинематическом приближении [1]. Величина I_m соответствует переменным ψ_0 и $\alpha_B = \alpha_0$, при которых знаменатель в выражении (5) принимает минимальное значение:

$$D(\psi, \alpha) = |\operatorname{Re}(q_{\mu\sigma}^g)|^2 + |\operatorname{Im}(q_{\mu\sigma}^g)|^2; \quad \frac{\partial D}{\partial \psi} = \frac{\partial D}{\partial \alpha_B} = 0. \quad (7)$$

Очевидный вид функций в уравнении (7) из уравнений (2) определяется следующим выражением:

$$\operatorname{Re}(q_{\mu\sigma}^g) = \frac{1}{2} \{ 2\psi + y' \mp \frac{1}{\sqrt{2}} [\sqrt{a^2 + b^2} + a]^{\frac{1}{2}} \}, \quad (8)$$

$$\operatorname{Im}(q_{\mu\sigma}^g) = \frac{1}{2} \{ y'' \mp \frac{1}{\sqrt{2}} [\sqrt{a^2 + b^2} - a]^{\frac{1}{2}} \}, \quad (9)$$

где

$$y = \beta \alpha_B - \chi_0 (1 + \beta); \quad a = (y')^2 - (y'')^2 + 4\beta(\chi_0' \alpha_B - \Delta_\sigma'),$$

$$b = 2y'y'' + 4\beta(\chi_0'' \alpha_B - \Delta_\sigma''); \quad \Delta_\sigma = \chi_0^2 - \chi_g \chi_{-g} = \Delta_\sigma' + i\Delta_\sigma''.$$

Значение $\text{Im}(q_{\mu\sigma}^g)$ не зависит от ψ , поэтому уравнение (7) сразу определяет ψ_0 :

$$\psi_0 = -\frac{1}{2} \left\{ y' \mp \frac{1}{\sqrt{2}} [\sqrt{a^2 + b^2} + a]^{\frac{1}{2}} \right\}. \quad (10)$$

Аналитическое решение второго уравнения в (7) приводит к нескольким значениям для параметра α_0 , среди которых выбирается решение, соответствующее положительным ψ_0 в уравнении (10) ($\psi_0 > \theta_0^2 > 0$) и минимуму величины:

$$D_0(\omega) \equiv D(\psi_0, \alpha_0) = |\text{Im} q_{\mu\sigma}^g(\psi_0, \alpha_0)|^2.$$

Как следует из уравнения (9), $\text{Im} q_{1,2\sigma}^g$ стремится к χ_0'' и $\beta\chi_0''$ вдали от условия Брэгга ($\alpha_B \gg |\chi_0'|$). Эти величины определяют поглощение первичной и дифрагированной волн в кинематической теории [1]. Поэтому увеличение спектральной интенсивности ПМИ вследствие динамических эффектов можно наблюдать в таком диапазоне частот, где выполняется условие:

$$D_0(\omega) < |\chi_0''(\omega)|^2.$$

Рассмотрим влияние динамических эффектов в ПМИ для искусственного мёссбауэровского кристалла $^{57}_{26}\text{Fe}$ с относительной концентрацией резонансных изотопов $\eta = 0,9$ и коэффициентом внутренней конверсии $\alpha_c = 9$ [6]. Для того чтобы проанализировать спектр ПМИ в узком спектральном диапазоне $|\omega - \omega_r| \approx \Gamma$, введем новые переменные:

$$\chi_0 = \chi(0, \omega_r) = \chi_{0e}' [1 + \frac{Ax}{x^2 + 1}] + i[\chi_{0e}'' - \frac{A}{x^2 + 1} \chi_{0e}'],$$

$$\chi_g = [\chi_{ge}' + \frac{Ax}{x^2 + 1} \chi_{0e}'] + i[\chi_{ge}'' - \frac{A}{x^2 + 1} \chi_{0e}'],$$

$$x = \frac{2(\omega - \omega_r)}{\Gamma}; \quad A = \eta \frac{mc^3}{e_0^2 \omega_r (1 + \alpha_c) Z}.$$

Для определенности предположим, что начальная скорость электрона параллельна нормали к кристаллу и ПМИ наблюдается вблизи дифракционного отражения [011] в $^{57}_{26}\text{Fe}$, которому соответствуют следующие значения:

$$\hbar\omega_r = \hbar\omega_B = 14,41 \text{ кэВ}; \quad \Gamma = 4,66 \cdot 10^{-12} \text{ кэВ}; \quad \theta_B = 12,26^\circ; \quad \beta = \gamma_0 = 0,9099; \quad A = 19,$$

$$\chi_{0e} = -0,1487 \cdot 10^{-4} + i0,6921 \cdot 10^{-6}; \quad \chi_{ge} = -0,1030 \cdot 10^{-4} + i0,6690 \cdot 10^{-6}.$$

В этом случае величина $\xi(x) = I_m/I_0$ (I_0 – интенсивность излучения вдали от условия Брэгга) определяется выражением

$$\xi(x) = \frac{[\chi_0''(x)]^2}{[\text{Im} q_{2\sigma}^g(x, \psi_0, \alpha_{01})]^2} [1 - \exp(-\frac{\omega_r L}{c\beta}) |\text{Im} q_{2\sigma}^g(x, \psi_0, \alpha_{01})|]^2.$$

Наиболее существенной является величина $\xi(x)$ при толщине кристалла L , большей длины поглощения:

$$L \gg L_{abs} = \frac{c}{2\omega_r \chi_0''(x)}.$$

Максимальное увеличение интенсивности излучения в реальном эксперименте зависит от энергии электронов. Например, для ПМИ от электронного пучка линейного ускорителя в Майнце [6] с $E = 855 \text{ МэВ}$ максимальное увеличение $\xi(x) \approx 10^5$ достигается при значении $\psi_M = 3,46 \cdot 10^{-5}$.

Как следует из рис. 2, указанное увеличение дифференциальной интенсивности можно наблюдать только в очень узкой области углов. Однако с экспериментальной точки зрения наиболее важной характеристикой ПМИ является его спектральное распределение, которое получается в результате интегрирования по углам в формуле (6). При вычислении этого интеграла удобно ввести новые переменные, учитывающие масштаб распределений по углам:

$$\tilde{\chi}(x) = \frac{\chi(x)}{\theta_0^2} \approx 1; \quad \psi = u\theta_0^2; \quad t = \alpha_B = \tau\theta_0.$$

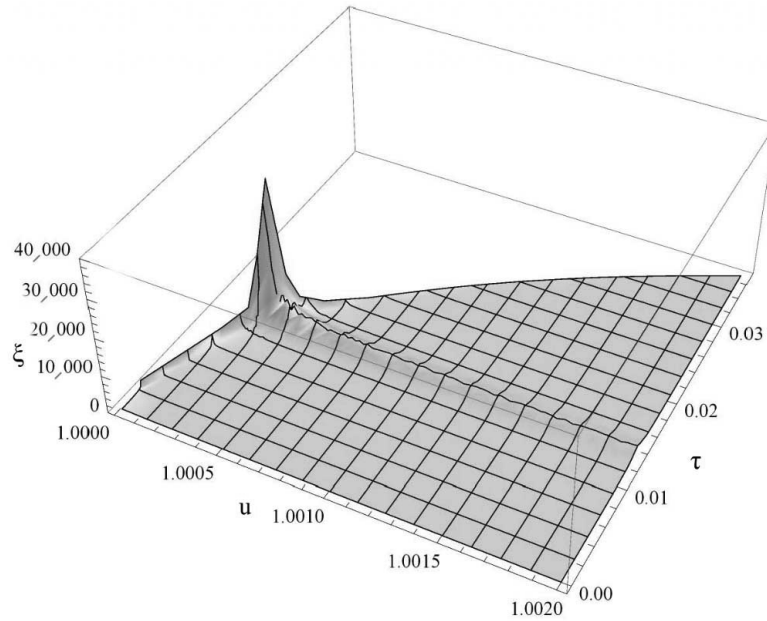


Рис. 2. Увеличение дифференциальной интенсивности ПМИ ξ в кристалле ^{57}Fe в зависимости от отклонения от условия Брэгга τ и угловой переменной u для параметров электронного пучка из [6] при отклонении от резонанса $x \approx -0,04$

Здесь предполагалось, что геометрия пика ПМИ выбрана таким образом, что $\omega_B = \omega_r$ и параметр $\delta = 4 \sin^2 \theta_B \frac{\Gamma x}{2\omega_r} \ll \alpha_B$. В результате формула (6) преобразуется следующим образом:

$$\frac{\partial N_\sigma^g}{\partial x} = \frac{e_0^2 \Gamma}{2\hbar\omega_r \pi^2 c} \beta^3 |\tilde{\chi}_g(x)|^2 \int_1^\infty du \int_0^{\tau_B} \frac{F(u, \tau, x) + F(u, -\tau, x)}{\sqrt{4(u-1)\sin^2 2\theta_B - \tau^2}} d\tau,$$

$$F(u, \tau, x) = \frac{\tau^2 / \sin^2 2\theta_B + \theta_s^2 / 2\theta_0^2}{\left[[u - u_0(\tau)]^2 - [u_0(\tau)^2 + \beta(\tilde{\chi}_0 \tau / \theta_0 - \tilde{\Delta}_\sigma)] \right]^2},$$

$$\tau_B = 2 \sin 2\theta_B \sqrt{u-1}; \quad u_0(\tau) = \frac{1}{2} [\tilde{\chi}_0 (1 + \beta) - \beta \tau / \theta_0].$$

Сравним эту величину со спектральной интенсивностью ПМИ, полученной в работе [1] в рамках кинематической теории дифракции, справедливой при толщине кристалла, меньшей длины экстинкции $L < c/(\omega_r |\chi_g|)$. В принятых выше обозначениях это распределение имеет вид (формула (14) из [1] при $u = 0$):

$$\left(\frac{\partial N_\sigma^g}{\partial x} \right)_k = \frac{e_0^2 \Gamma}{8\hbar c \omega_r \sin 2\theta_B} \theta_0 |\tilde{\chi}_g(x)|.$$

Таким образом, изменение спектральной интенсивности ПМИ в толстом кристалле, обусловленное динамическими эффектами, определяется величиной

$$A = \frac{\partial N_\sigma^g / \partial x}{\left(\frac{\partial N_\sigma^g}{\partial x} \right)_k} = \frac{4 \sin 2\theta_B}{\pi^2 \theta_0} \beta^3 |\tilde{\chi}_g(x)| \int_1^\infty du \int_0^{\tau_B} \frac{F(u, \tau, x) + F(u, -\tau, x)}{\sqrt{4(u-1)\sin^2 2\theta_B - \tau^2}} d\tau.$$

Этот интеграл можно вычислить аналитически при условии, что мнимая часть поляризуемости кристалла вблизи резонанса существенно больше действительной части. При этом

$$A(x) \approx \beta [1 + \theta_s^2 / 2\theta_0^2] \approx 1.$$

В результате получаем, что вклад от пика, соответствующего аномальному прохождению гамма-квантов в дифференциальном сечении, в спектральную интенсивность ПМИ достаточно мал, так что полное число резонансных фотонов имеет такую же величину, как в кинематической теории [1]. Это доказывает возможность использования толстых кристаллов для получения ПМИ, несмотря на значительное поглощение мёссбауэровского излучения в резонансных условиях.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Ahmadi A., Feranchuk I. Parametric gamma-radiation from electrons in Mössbauer crystal // Eur. Phys. Jour. Appl. Phys. 2013. Vol. 62. P. 10702.
2. Baryshevsky V. G., Feranchuk I. D., Ulyanenko A. P. Parametric X-ray Radiation in Crystals. Theory, Experiment and Applications. Berlin; Heidelberg, 2005.
3. Authier A. Dynamical Theory of X-ray Diffraction. New York, 2001.
4. Ahmadi A., Feranchuk I. Increase of Parametric X-ray Intensity due to the Borrmann Effect // Nucl. Instr. and Meth. in Phys. Res. B. 2013. Vol. 311. P. 78–87.
5. Беляков В. А. Дифракция мёссбауэровского гамма-излучения на кристаллах // УФН. 1975. Т. 115. С. 553–599.
6. Brenzinger K. H., Herberg C., Limburg B., Backe H., Dambach S., Euteneuer H., Hagenbuck F., Hartmann H., Johann K., Kaiser K. H., Kettig O., Knies G., Kube G., Lauth W., Schoepe H., Walcher Th. Investigation of the production mechanism of parametric X-ray radiation // Z. Phys. A. 1997. Vol. 358. P. 107–114.

Поступила в редакцию 12.12.13.

Аббас Ахмади – аспирант кафедры теоретической физики и астрофизики. Научный руководитель – И. Д. Феранчук.

Илья Давыдович Феранчук – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой теоретической физики и астрофизики.